Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1b. Uwarunkowanie układu – przykład dwóch sprężyn

10.2024

Błąd numeryczny

$$[K]\{q\}=\{F\},$$

$$[K+\delta K]\{q+\delta q\}=\{F+\delta F\}.$$

Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|}\le \underbrace{\|[K]\|\|[K]^{-1}\|}_{cond([K])}\left(\frac{\|\{\delta F\}\|}{\|\{F\}\|}+\frac{\|[\delta K]\|}{\|[K]\|}\right),$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$cond([K])=\frac{\text{Zmiana rozwiązania}}{\text{Zmiana danych wejściowych}}$$

$$cond\left([K]\right) \approx 1$$

Problem dobrze uwarunkowany,

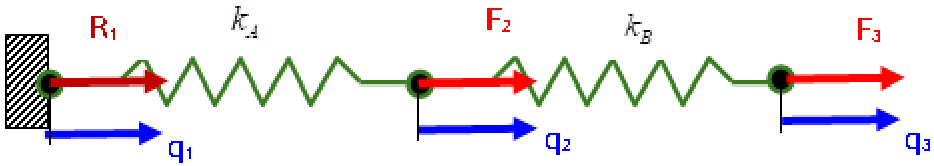
$$cond\left([K]\right) \gg 1$$

Problem źle uwarunkowany.
(duże różnice pomiędzy sztywnością elementów, niestabilne warunki brzegowe)

Norma macierzy (wektora) – miara wielkości

	Vector norm	Matrix norm
Euklidean norm L_2	$\lVert\{q\}\rVert = \left(\sum_i (q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\lVert[K]\rVert = \left(\sum_j \sum_i (k_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$
Max norm L_∞	$\lVert\{q\}\rVert = \max_i \lvert q_i \rvert$	$\lVert[K]\rVert = \max_i \left(\sum_j \lvert k_{ij} \rvert\right)$

Przykład Dwie sprężyny



Macierz sztywności sprężyny:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\lfloor q \rfloor = \lfloor q_1, q_2, q_3 \rfloor \qquad \lfloor F \rfloor = \lfloor R_1, F_2, F_3 \rfloor$$

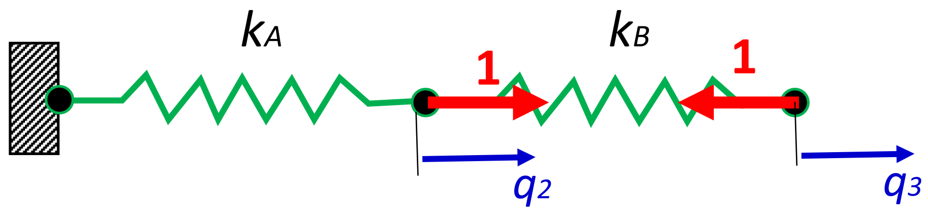
$$\underset{3\times 3}{[K]} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ -k_A & k_A+k_B & -k_B \\ 0 & -k_B & k_B \end{bmatrix} + \begin{matrix}\text{Boundary} \\ \text{Conditions} \\ (q_1=0)\end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} k_A+k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}}$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det[K]} \cdot [K^D]^T = \frac{\begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A+k_B \end{bmatrix}^T}{(k_A+k_B)k_B - (-k_B)\cdot(-k_B)} = \frac{1}{k_A \cdot k_B} \begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A+k_B \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k_A} & \dfrac{1}{k_A} \\ \dfrac{1}{k_A} & \dfrac{1}{k_A} + \dfrac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}}$$

Załóżmy: $F_2 = 1\ N$, $F_3 = -1\ N$ *(Siły są w równowadze)*



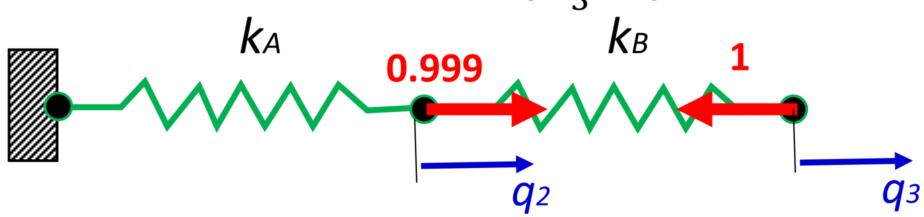
$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1),$$

$$q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3 \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (2)$$

Przyjmijmy odchyłki siły:

$$\begin{cases} \delta F_2 = -.001\ N \\ \delta F_3 = 0N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 + \delta F_2 = 0.999\ N \\ F_3 + \delta F_3 = -1N \end{cases}$$



Mamy:

$$q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + \frac{F_3 + \delta F_3}{k_A} \quad (3),$$

$$q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3) \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (4)$$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5),$$

$$\delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

<u>Przyjmijmy normy Euklidesa</u>:

$$\|\{q\}\|_2 = \sqrt{{q_2}^2 + {q_3}^2} \quad , \qquad \|\{\delta q\}\|_2 = \sqrt{{\delta q_2}^2 + {\delta q_3}^2}$$

$$\|\{F\}\|_2 = \sqrt{{F_2}^2 + {F_3}^2} \quad , \qquad \|\{\delta F\}\|_2 = \sqrt{{\delta F_2}^2 + {\delta F_3}^2}$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{{\delta q_2}^2 + {\delta q_3}^2}}{\sqrt{{q_2}^2 + {q_3}^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i (k_{ij})^2} \quad (8),$$

$$cond([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9)$$

Przykład wyliczenia współczynnika uwarunkowania macierzy w zadaniu ze sprężynkami:

dla: $k_A = k_B = 1000$ N/mm

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1000 & 1/1000 \\ 1/1000 & 2/1000 \end{bmatrix} = 1/1000 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$cond([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot 1/1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} = 7$$

dla: $k_A = 1 \;\; i \;\; k_B = 1000$ N/mm

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix}$$

$$cond([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(1.001^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1.001^2)} = 4002$$

$$q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1),$$

$$q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3\left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right) \quad (2)$$

$$q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2+\delta F_2}{k_A} + \frac{F_3+\delta F_3}{k_A} \quad (3),$$

$$q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2+\delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3)\left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right) \quad (4)$$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5),$$

$$\delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{\delta {q_2}^2 + \delta {q_3}^2}}{\sqrt{{q_2}^2 + {q_3}^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i \left(k_{ij}\right)^2} \quad (8),$$

$$cond([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9),$$

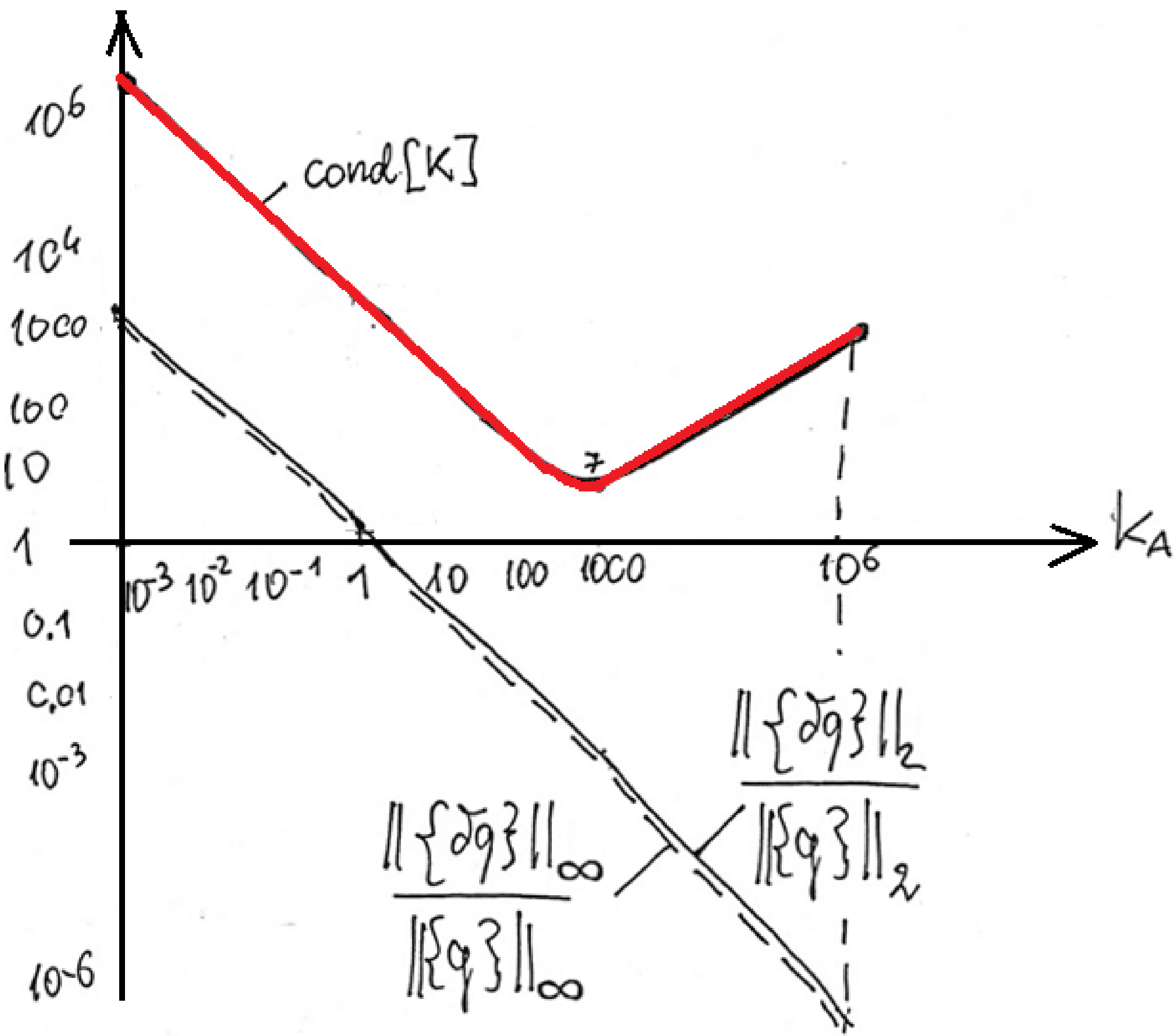
$$cond([K])\frac{\|\{\delta F\}\|_2}{\|\{F\}\|_2} = cond([K])\frac{\sqrt{\delta {F_2}^2 + \delta {F_3}^2}}{\sqrt{{F_2}^2 + {F_3}^2}} \quad (10)$$

(Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych)

Załóżmy: $k_A - zmienne$

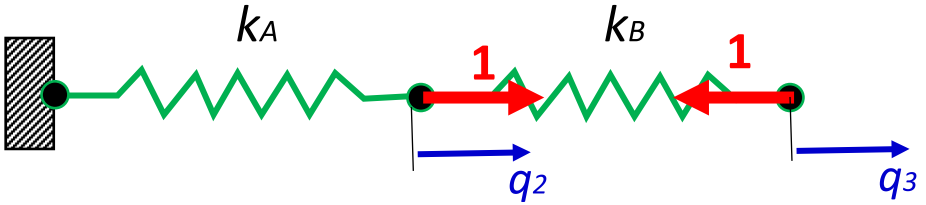
$k_B = 1000$ N/mm - *stałe*

k_A N/mm	q_2 mm	q_3 mm	$q_2 + \delta q_2$ mm	$q_3 + \delta q_3$ Mm	δq_2 mm	δq_3 mm	$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2}$	$cond([K])$	$cond([K])\frac{\|\{\delta F\}\|_2}{\|\{F\}\|_2}$
Wzór ➔	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(9)	(10)
0.001	0	-0.001	-1	-1.001	-1	-1	1414.21	$4 \cdot 10^6$	2828.43
1	0	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	1.41	4002	2.83
1000	0	-0.001	-10^{-6}	$-1.001 \cdot 10^{-3}$	-10^{-6}	-10^{-6}	$1.41 \cdot 10^{-3}$	7	0.00495
10^6	0	-0.001	-10^{-9}	$-1.000 \cdot 10^{-3}$	-10^{-9}	-10^{-9}	$1.41 \cdot 10^{-6}$	1000	0.7



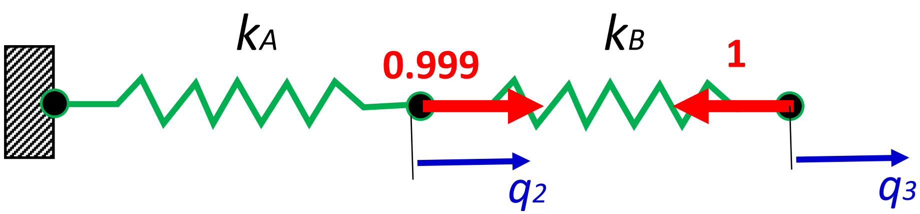
cond[K]
10^6
10^4
1000
100
10
1
0.1
0.01
10^{-3}
10^{-6}
10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 1 10 100 1000
10^6
7
k_A
$\frac{\|\{\partial q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2}$
$\frac{\|\{\partial q\}\|_\infty}{\|\{q\}\|_\infty}$

$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

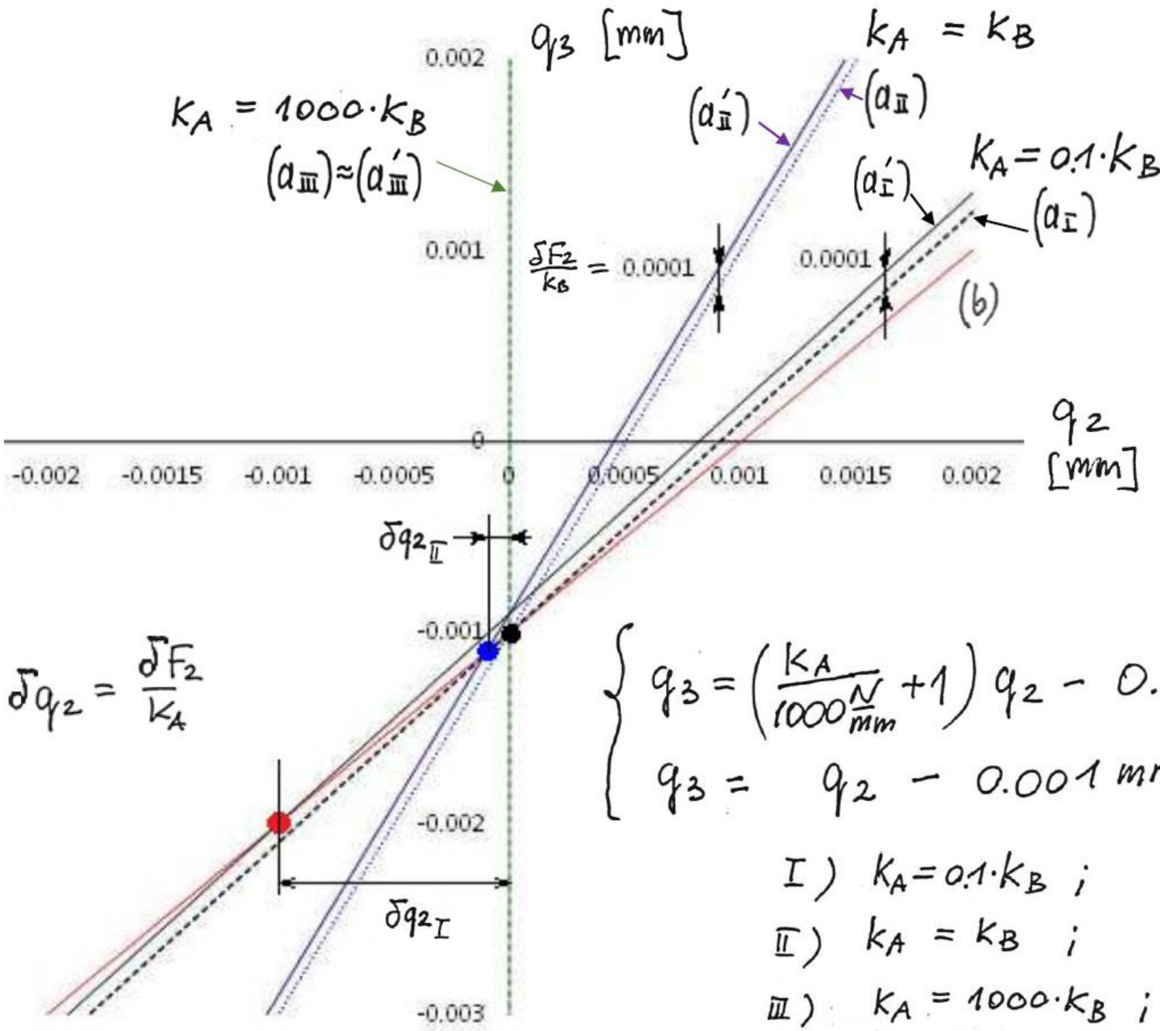


$$\begin{cases} (k_A + k_B)\, q_2 - k_B\ q_3 = F_2 \\ -k_B\, q_2 + k_B\ q_3 = F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_3 = \dfrac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \dfrac{F_2}{k_B} & (a) \\ q_3 = q_2 + \dfrac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 + \delta F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} (k_A + k_B)\, q_2 - k_B\ q_3 = F_2 + \delta F_2 \\ -k_B\, q_2 + k_B\ q_3 = F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_3 = \dfrac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \dfrac{F_2}{k_B} - \dfrac{F_2}{k_B} & (a') \\ q_3 = q_2 + \dfrac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$



$$\begin{cases} q_3 = \dfrac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \dfrac{F_2}{k_B} & (a) \\ q_3 = q_2 + \dfrac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_3 = \dfrac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \dfrac{F_2}{k_B} - \dfrac{F_2}{k_B} & (a') \\ q_3 = q_2 + \dfrac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_3 = \left(\dfrac{k_A}{1000 \frac{N}{mm}} + 1 \right) q_2 - 0.001\,mm & (a) \\ q_3 = q_2 - 0.001\,mm & (b) \end{cases}$$

I) $k_A = 0.1 \cdot k_B$;

II) $k_A = k_B$;

III) $k_A = 1000 \cdot k_B$;

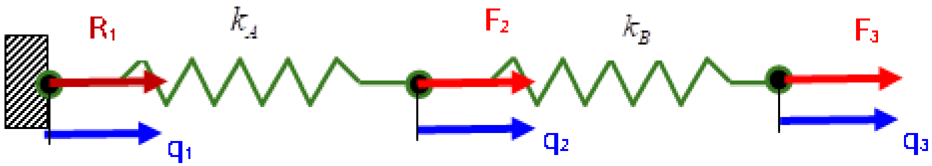
System źle uwarunkowany, jeśli:

$$\frac{k_A + k_B}{k_B} \to 1 \qquad \frac{k_A}{k_B} \to 0$$

Wrażliwość na zmianę nachylenia

$k_A \ll k_B$ **system ill conditioned**

Podsumowanie przykładu Dwie sprężyny



Układ równań:

$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Pierwsze równanie: $q_3 = \boxed{\dfrac{k_A + k_B}{k_B}} \cdot q_2 - \dfrac{F_2}{k_B}$

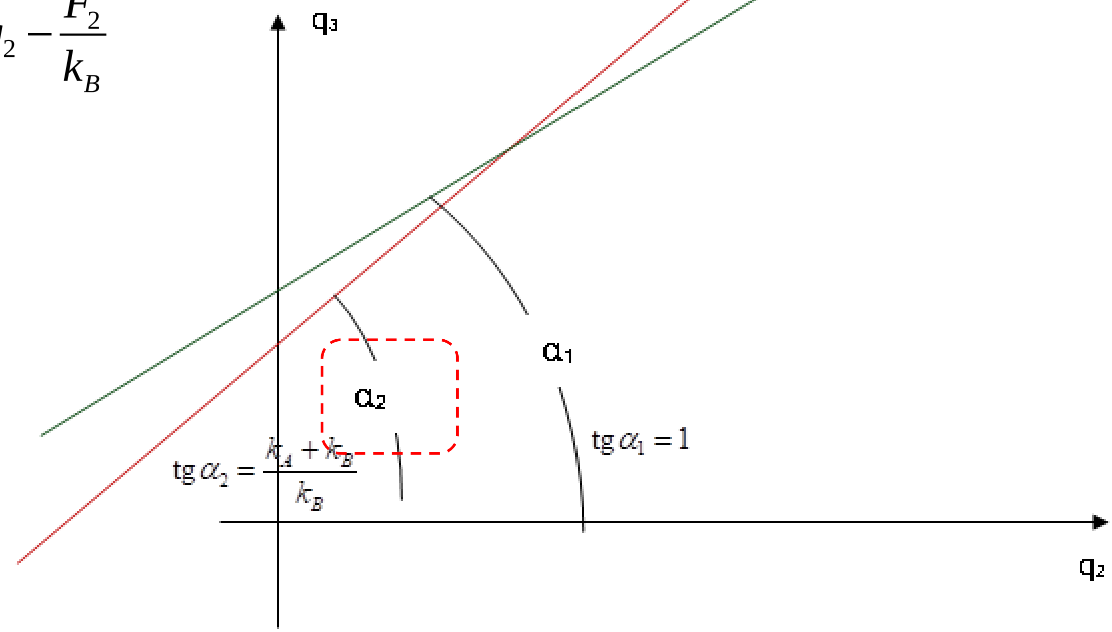
Drugie równanie: $q_3 = q_2 + \dfrac{F_3}{k_B}$

System źle uwarunkowany, jeśli:

$$\frac{k_A + k_B}{k_B} \to 1 \qquad \frac{k_A}{k_B} \to 0$$

Wrażliwość na zmianę nachylenia

$k_A << k_B$ - *system ill conditioned*



Błąd zaokrąglenia

Jeżeli obliczenia prowadzone są z dokładnością do p cyfr znaczących, to liczbę cyfr znaczących w rozwiązaniu można szacować jako: $r \geq p - \log_{10}\left(cond\left(\left[K\right]\right)\right)$

p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb
r – liczba cyfr znaczących wyniku

Duży współczynnik uwarunkowania cond([K]) prowadzić może do utraty wymaganej dokładności rozwiązania (różnice w sztywności lub mało stabilne warunki podparcia).

W praktycznych zadaniach MES cond([K]) osiąga 10^8